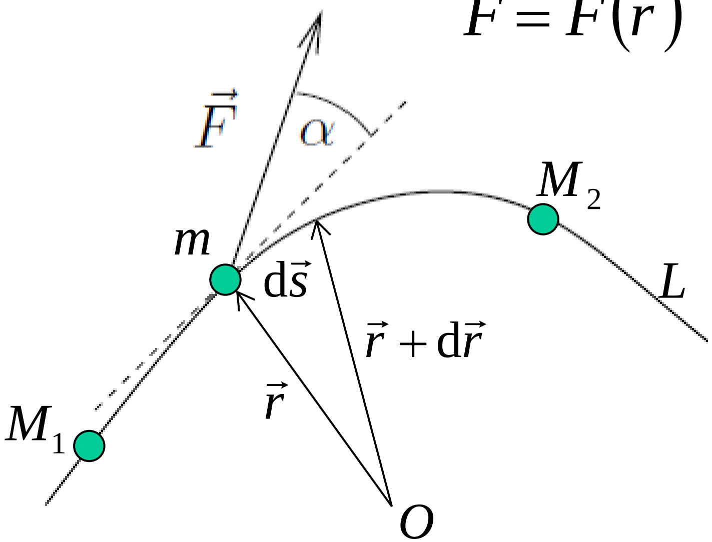
Mechanická práce, okamžitý výkon



$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

- **Elementární práci** definujeme:

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=F\,ds\cos\alpha,\quad [\mathrm{J}]$$

- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$A_{21}=\int_{L(M_1)}^{L(M_2)}\vec{F}\,d\vec{s}\quad [\mathrm{J}]$$

$$A_{12}=\int_{L(M_2)}^{L(M_1)}\vec{F}\,d\vec{s}=-\int_{L(M_1)}^{L(M_2)}\vec{F}\,d\vec{s}=-A_{21}$$

- Pokud je rovnice křivky zadaná parametricky:

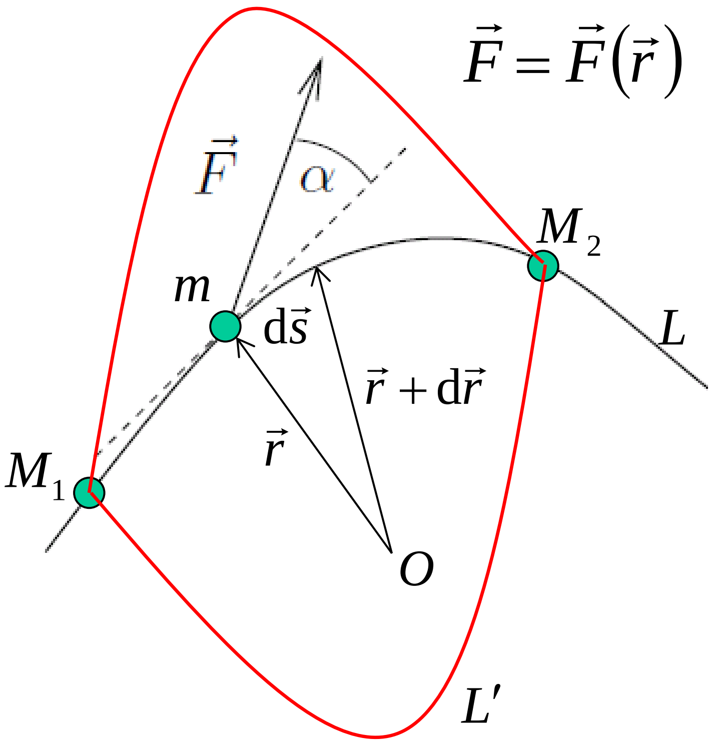
$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$A_{12}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}\cdot\vec{v}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dA}{dt}\right)dt$$

- **Okamžitý výkon** definujeme:

$$P\equiv\frac{dA}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v},\quad [\mathrm{W}]$$

Mechanická práce, kinetická energie



- Vztah pro elementární práci přepíšeme na tvar:

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = m(\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}) = \frac{1}{2}m\mathrm{d}(\vec{v} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{d}W_k$$

- **Kinetickou energii** hmotného bodu zavedeme vztahem:

$$W_k \equiv E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad [\mathrm{J}]$$

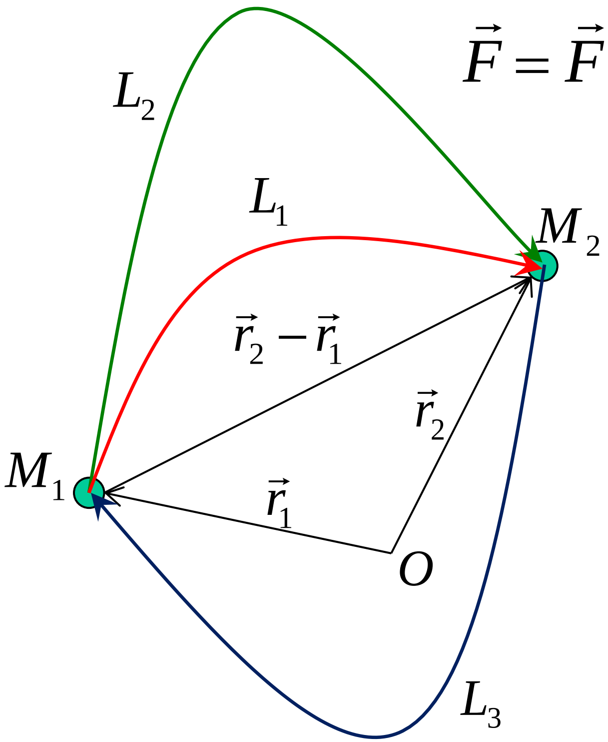
- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \mathrm{d}W_\mathrm{k} = [W_\mathrm{k}]_{M_1}^{M_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta W_k = A_{21}$$

- **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11} = \oint_{L'} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Mechanická práce, potenciální energie



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11} = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0, \quad \vec{F}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k(\vec{r})$$

- Práce A_{21} vykonaná silovým polem z bodu M_1 do bodu M_2 nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body:

$$A_{21}(L_1) = \int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad A_{21}(L_2) = \int_{L_2(M_1)}^{L_2(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

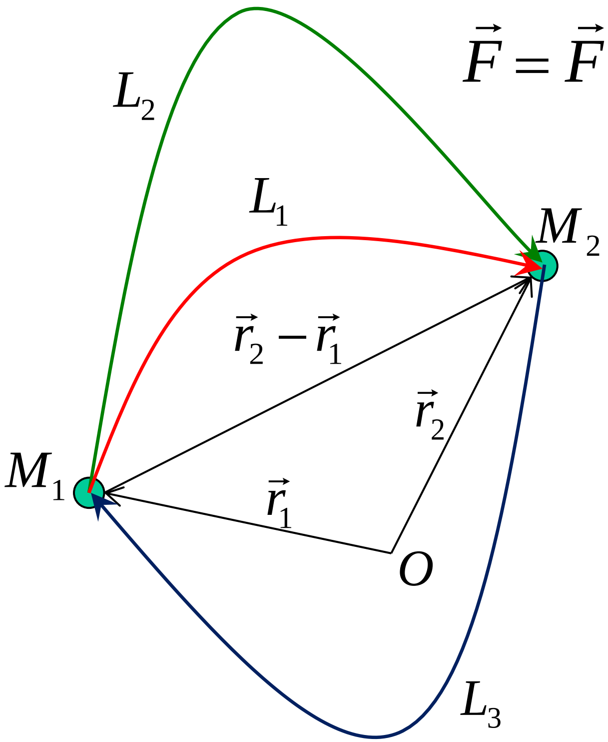
$$A_{12}(L_3) = \int_{L_3(M_2)}^{L_3(M_1)} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

$$L = L_1 + L_3, \quad L' = L_2 + L_3$$

$$A_{11}(L) = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = A_{21}(L_1) + A_{12}(L_3) = A_{11}(L') = \oint_{L'} \vec{F} \cdot d\vec{s} = A_{21}(L_2) + A_{12}(L_3) = 0$$

$$\Rightarrow A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2)$$

Mechanická práce, potenciální (polohová) energie



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- Jelikož práce A_{21} nezávisí na tvaru dráhy, ani odpovídající změna kinetické energie nezávisí na tvaru dráhy:

$$\Delta W_{\mathrm{k}}(L_1) = \Delta W_{\mathrm{k}}(L_2) = A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2)$$

$$A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2) = A_{21}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

- Protože velikost vektoru nezávisí na volbě souřadnic, nezávisí na ní ani hodnota A_{21}. Pomocí veličiny A_{21} můžeme každé poloze hmotného bodu přiřadit číslo $W_{\mathrm{p}}(\vec{r})$, které nazveme **potenciální (polohová) energie**

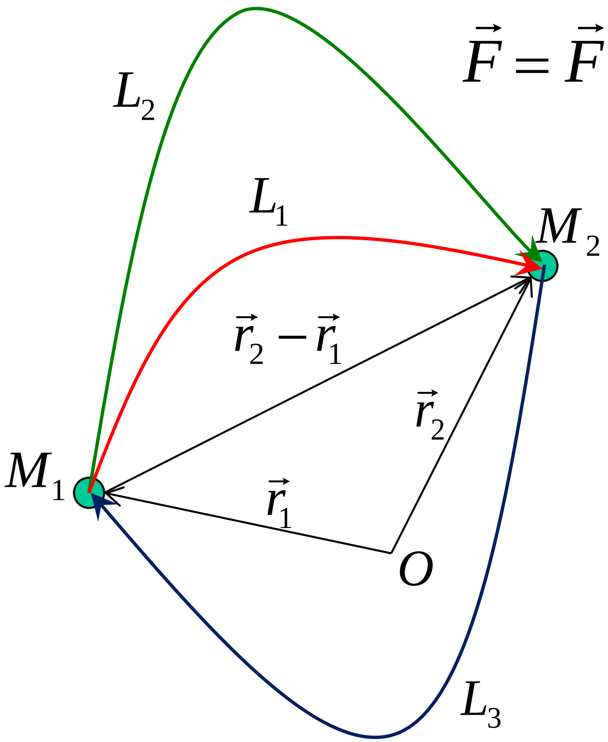
$$W_{\mathrm{p}1} \equiv E_{\mathrm{p}1} \equiv W_{\mathrm{p}}(\vec{r}_1) = C$$

$$W_{\mathrm{p}2} = W_{\mathrm{p}}(\vec{r}_2) = W_{\mathrm{p}1} - A_{21} = C - A_{21}$$

- Zavedeme-li rozdíl potenciálních energií hmotného bodu v polohách M_1 a M_2 vztahem:

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = W_{\mathrm{p}2} - W_{\mathrm{p}1} \Rightarrow A_{21} = -\Delta W_{\mathrm{p}}$$

Mechanická práce, zákon zachování energie



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- Jelikož :

$$A_{21} = \Delta W_\mathrm{k} \Rightarrow \Delta W_\mathrm{k} = -\Delta W_\mathrm{p}$$

$$W_{\mathrm{k}2} - W_{\mathrm{k}1} = -W_{\mathrm{p}2} + W_{\mathrm{p}1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\mathrm{k}2} + W_{\mathrm{p}2} = W_{\mathrm{k}1} + W_{\mathrm{p}1} = konst.$$

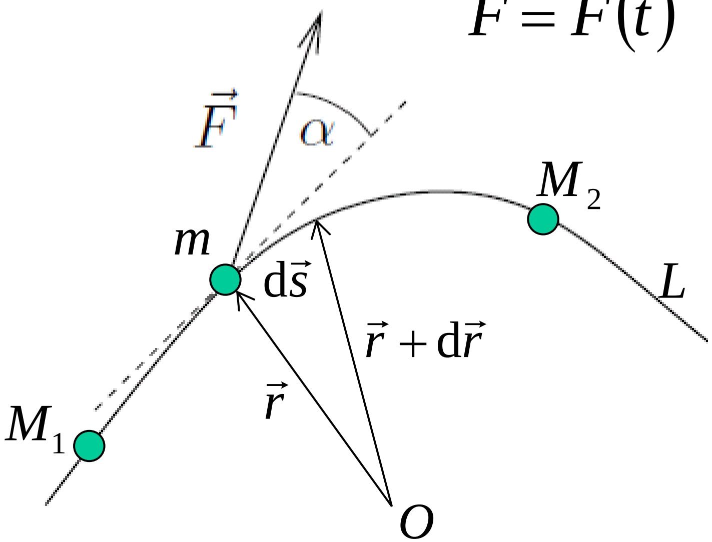
- Nazvěme součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu (tělesa) **mechanickou energií.** Vidíme, že se při pohybu hmotného bodu v konzervativním silovém poli mechanická energie nemění, zůstává zachována (konzervována):

$$W_m \equiv W_\mathrm{k} + W_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = konst.$$

- Tento vztah nazýváme **zákonem zachování mechanické energie.**

Časový účinek síly, impuls síly, zákon zachování hybnosti

$$\vec{F} = \vec{F}(t)$$



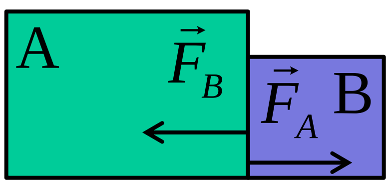
- Podle druhého Newtonova zákona se projeví působení síly během elementárního časového intervalu dt elementární změnou hybnosti:

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt, \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

- Integrál na pravé straně nazýváme **Impuls síly**:

$$\vec{J} \equiv \vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}$$



- Změna hybnosti těles je dána působením sil v časovém intervalu <t_1, t_2>:

$$\Delta\vec{p}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt \quad \Delta\vec{p}_B = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt$$

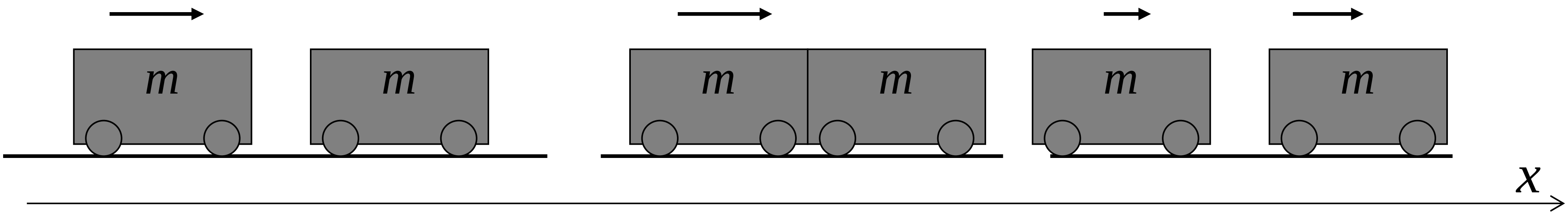
- **Zákon zachování hybnosti** plyne ze 3 New. zák.:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2) = konst.$$

Příklad - Zákon zachování hybnosti a energie – pružná srážka

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{v}_1 = (v_{1x}, 0, 0)$ $\quad$ $\vec{v}_2 = (v_{2x}, 0, 0)$



zákon zachování hybnosti: $\quad m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$

$$mv_x = mv_{1x} + mv_{2x}$$

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} \longrightarrow v_{2x} = v_x - v_{1x}$$

$$v_x^2 = v_{1x}^2 + v_{2x}^2$$

zákon zachování energie: $\quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

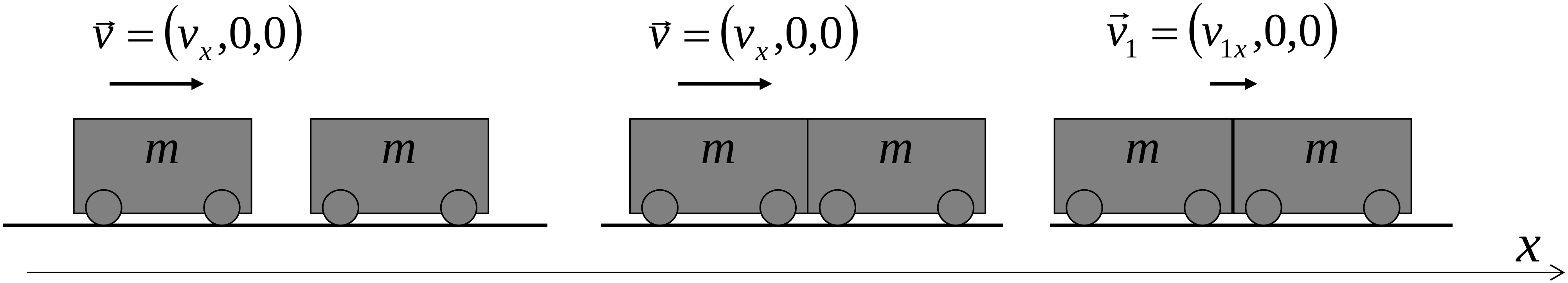
$$v_{1x}\left(v_{1x} - v_x\right) = 0$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 + \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$v_{1x} = 0 \quad v_{2x} = v_x$$

$$v_{1x} = v_x \quad v_{2x} = 0$$

Příklad - Zákon zachování hybnosti a energie – nepružná srážka

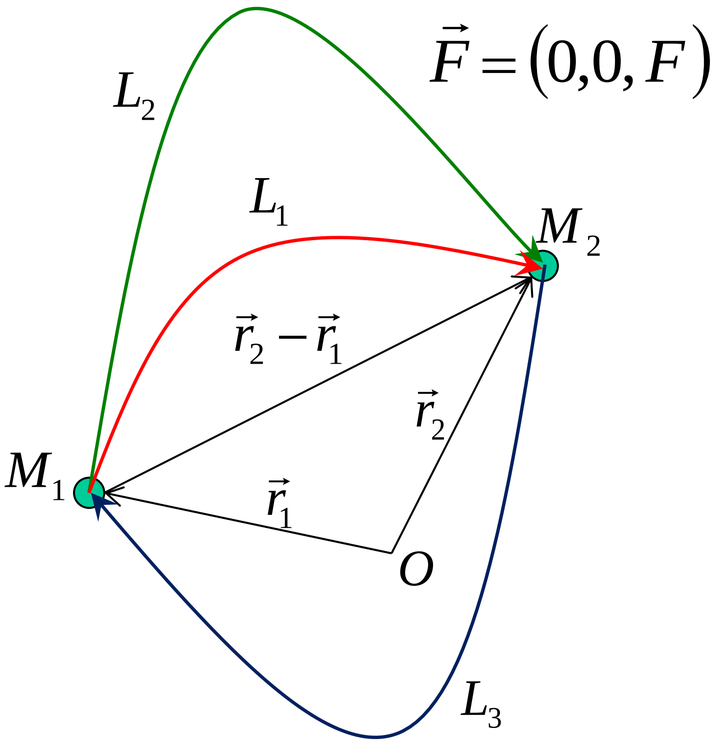


zákon zachování hybnosti: $mv_x = 2mv_{1x} \longrightarrow v_{1x} = v_x / 2$

zákon zachování energie: $\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}2mv_{1x}^2 \longrightarrow v_{1x} = v_x / \sqrt{2}$

zákon zachování energie: $\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}2mv_{1x}^2 + E_D \longrightarrow E_D = \frac{1}{4}mv_x^2$

Příklad - potenciální energie v homogenním silovém poli



- Práce A_{21} vykonaná silovým polem z bodu M_1 do bodu M_2 nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body:

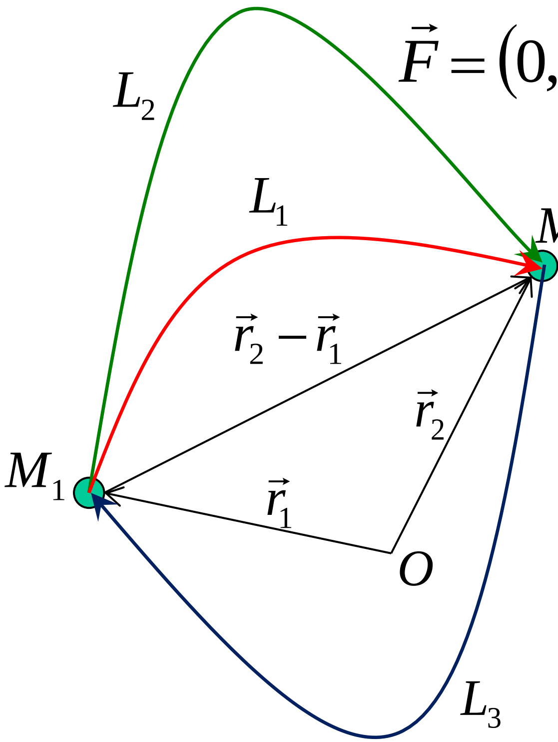
$$A_{21}(L_1) = \int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)} \left(F_x \cdot \mathrm{d}x + F_y \cdot \mathrm{d}y + F_z \cdot \mathrm{d}z\right)$$

$$A_{21}(L_1) = \int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)} F_z \cdot \mathrm{d}z = F(z_2 - z_1) + C$$

- Hmotnému bodu můžeme tedy připsat potenciální energii:

$$W_\mathrm{p}(\vec{r}) = -A_{21} = -F \cdot z + C$$

Příklad - potenciální energie v homogenním tíhovém poli Země



$$\vec{F} = (0{,}0{,}-mg)$$

- Hmotnému bodu můžeme tedy připsat potenciální energii:

$$W_\mathrm{p}(z=0) = 0 - \text{nulová potenciální energie}$$

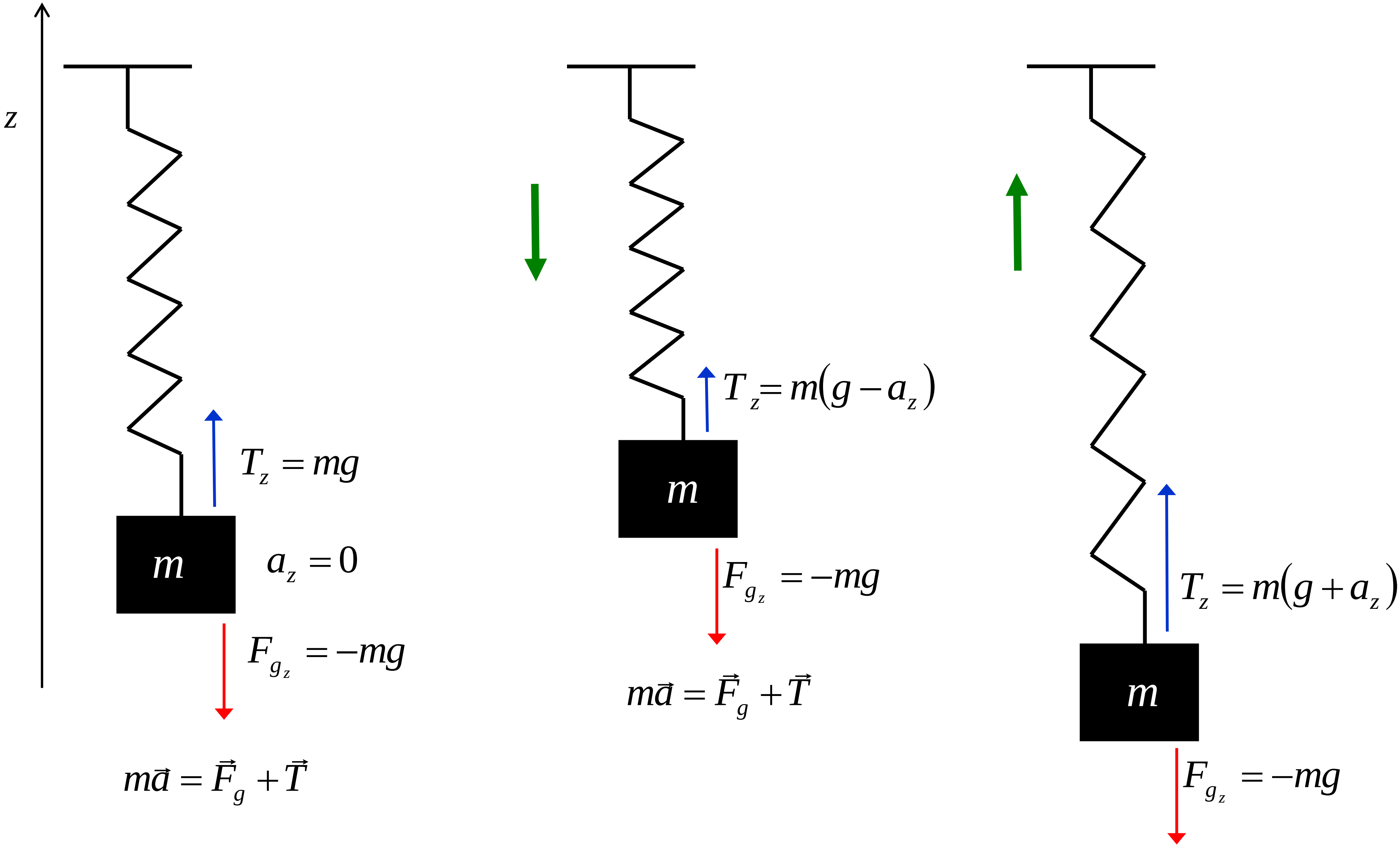
$$z = h - \text{výška nad povrchem Země}$$

$$W_\mathrm{p}(\vec{r}) = -F \cdot z + C \Rightarrow W_\mathrm{p}(h) = mgh$$

- **Zákon zachování mechanické energie** v homogenním tíhovém poli Země můžeme potom psát ve známém tvaru:

$$W_m = W_k + W_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = konst.$$

Co ukazuje váha?

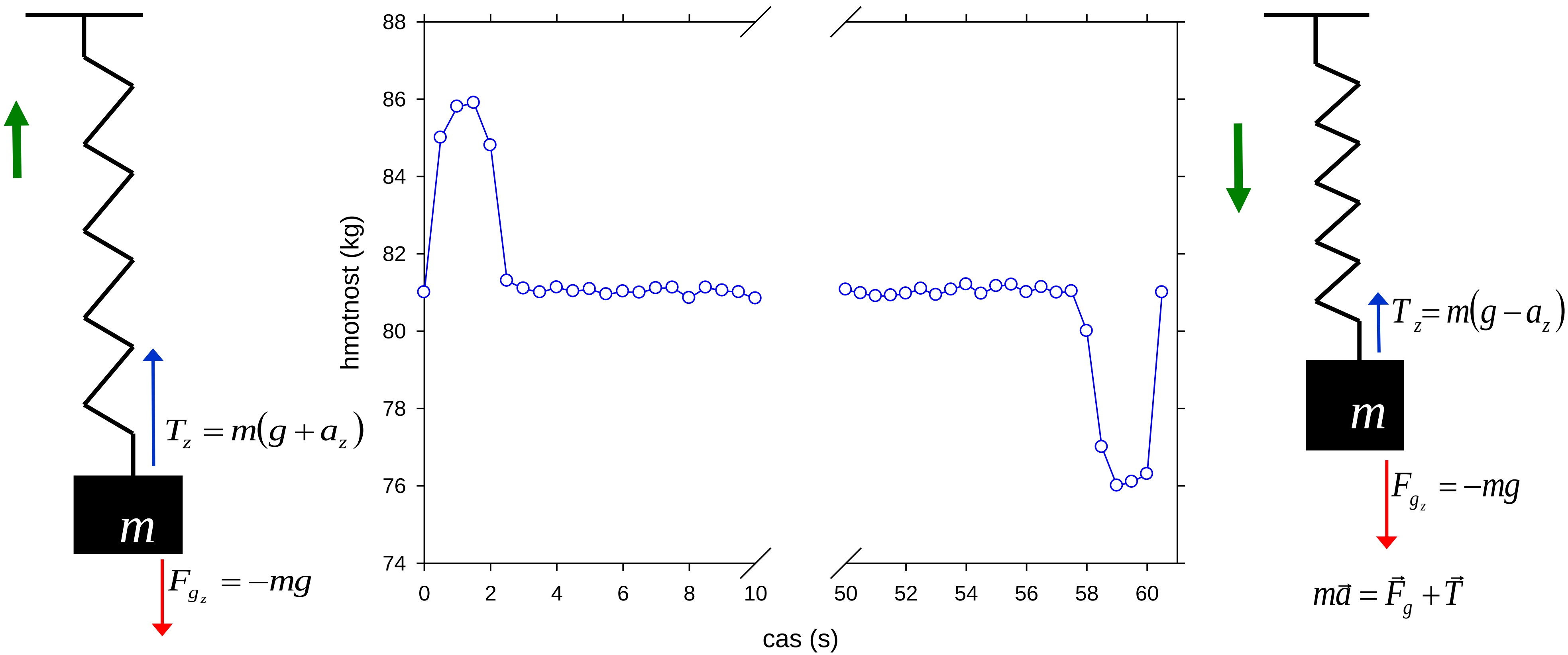


Co ukazuje váha?

Jedoucí výtah

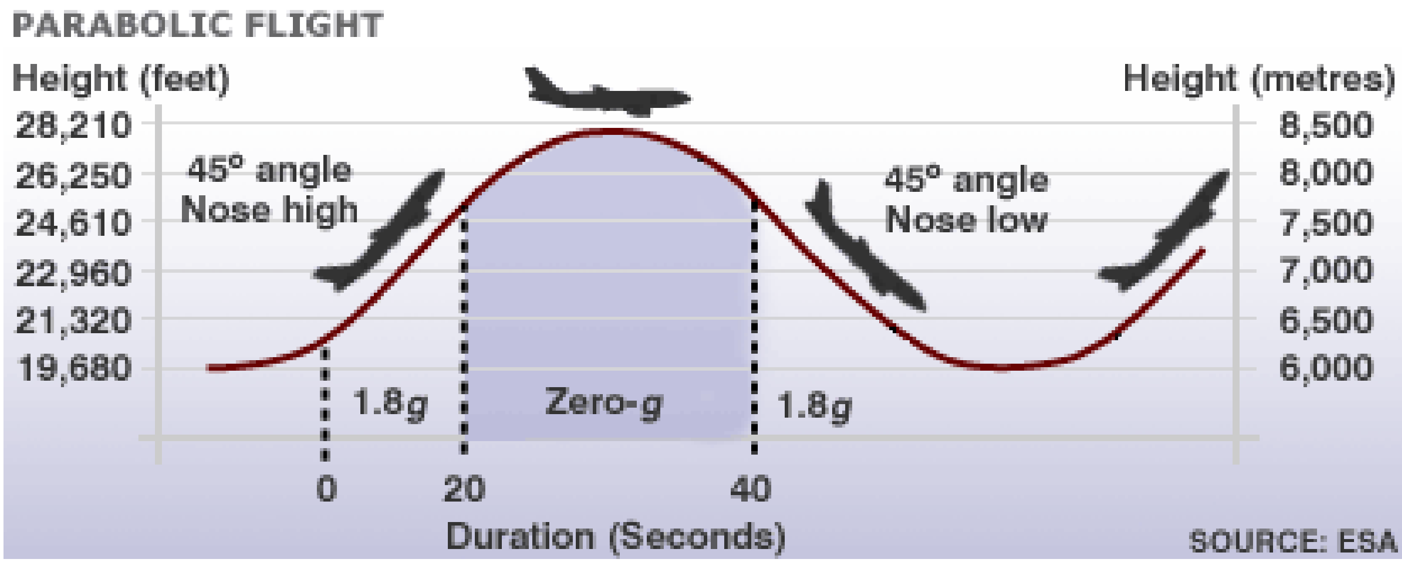
$$ma \approx 50\,N$$

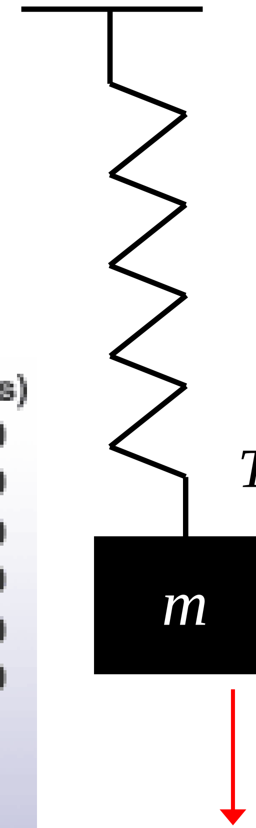
$$a \approx 0.6 \text{ ms}^{-2} = 0.06g$$



Stav beztíže

- parabolický let





$$T_z = m(g-g) = 0$$

$$a_z = -g$$

$$F_{g_z} = -mg$$